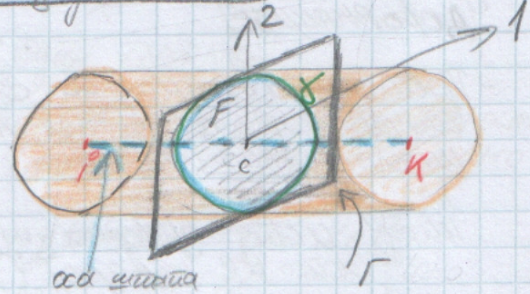
1 1) ДЕФИНИЦИЈА ШТАПА, РАВНО СТАЊЕ ПОМЕРАЊА ШТАПА, ПРЕТПОСТАВКЕ, КОМПОНЕНТЕ ПОМЕРАЊА ТАЧАКА ОСЕ ШТАПА И ВЕЗЕ ИЗМЕЂУ ЊИХ. ИЗВЕСТИ ИЗРАЗЕ ЗА КОМПОНЕНТЕ ПОМЕРАЊА ТАЧКЕ НА ОДСТОЈАЊУ z ОД ОСЕ ШТАПА У ТЕОРИЈИ МАЛИХ ДЕФОРМАЦИЈА И МАЛИХ ОБРТАЊА.

* Дефиниција штапа:



решара

γ - крива која ограничава површ F, лежи у равни управно на криву i-k.

1,2 - осе инерције ; крива i-k → оса штапа
c - тежиште п.п. ; F - попречни пресеци штапа
Г - омотач штапа који са поп. пресецима на крајевима представља спољашњу површину штапа.

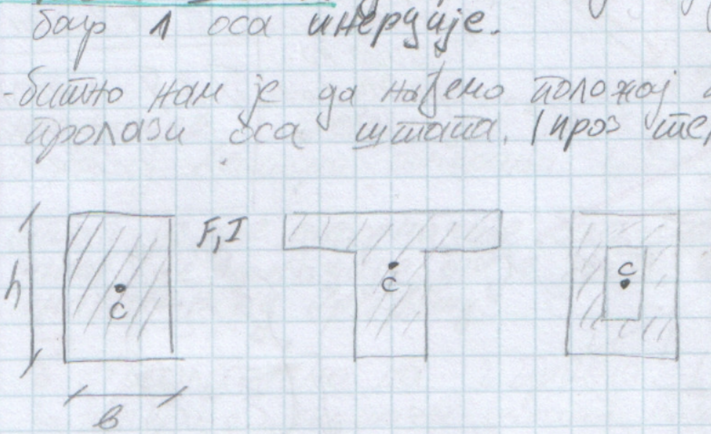
⇒ Штапом називамо тело које ограничава површ Г и површи F у тачкама i и k.

Крива γ ограничава различите површине и даје различите попречне пресеке, па постоје штапови са:

1) константним попречним пресеком (п.п. у свим тачкама осе исти)
2) променљивим попречним пресеком (п.п. разл. у тачкама осе)

* Раван штап:

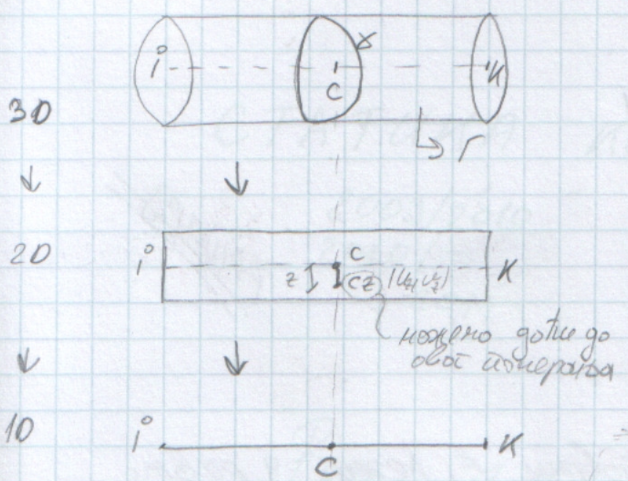
- то је онај штап код кога једна од главних оса инерције свих попречних пресека лежи у истој равни са равни штапа.
- Раван штапа је раван у којој лежи оса штапа и бар 1 оса инерције.
- битно нам је да нађемо положај тежишта јер кроз њега пролази оса штапа. (кроз тежишта свих попречних пресека).



Јеха

* Равна деформација штапа

- Из штапа који је 3D издвајамо ј-не за линијски елемент



Да би прешли са 3D на праву линију неопходно је да уведемо појам **РАВНЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ.**

- Претпостављамо да се све тачке које се налазе на штапу на правцима управним на раван штапа имају **исту деформацију.** (исто се померају)

•• имају исто пом.

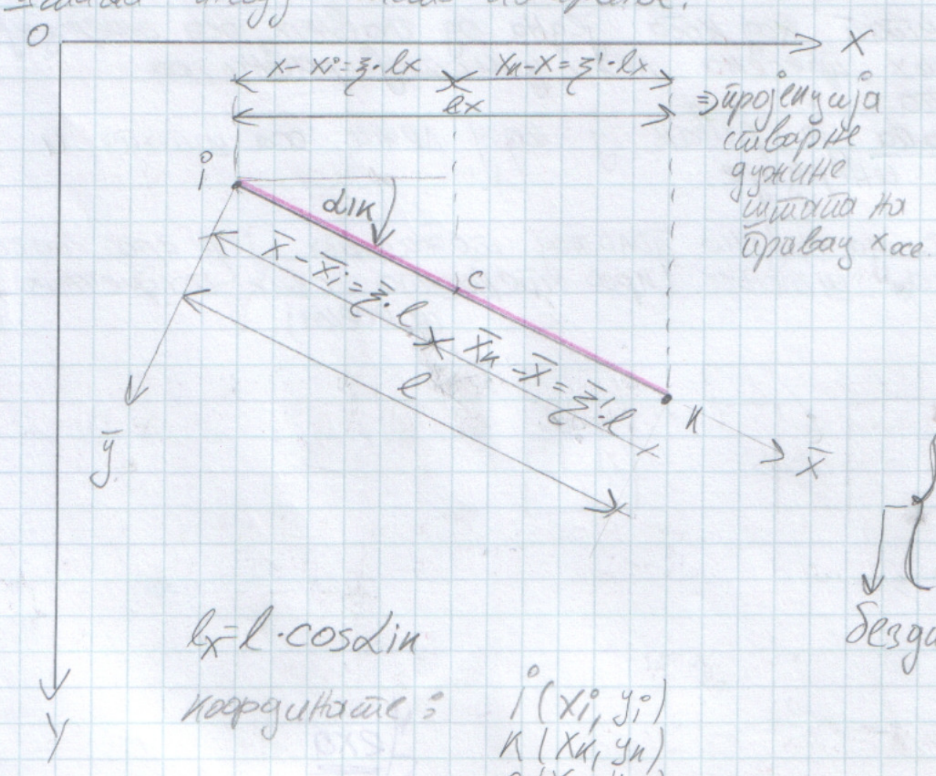
⇓

све тачке дуж осе 1 имају исто померање.

- пошто све тачке имају исто пом. можемо прећи на 1D.

- померање тачке C_z можемо изразити преко померања тачке C. (Ако се могу одредити померања тачке C онда се може одредити и C_z на висини z од C) са 2D на 1D

- ако имамо 1 линију уместо штапа и познато су нам померања тачке C на оси штапа, онда можемо да срачунамо пом. тачке C_z, а онда по претпоставци о равној деформацији све остале тачке управне на раван штапа имају исто померање.



⇒ пројекција стварне дужине штапа на правац x осе.

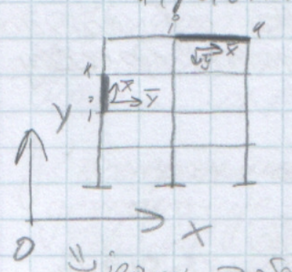
xOy - глобални координатни систем
$\bar{x}$ i $\bar{y}$ - локални координатни систем

$$\left.\begin{aligned} \xi + \xi' &= 1 \\ \bar{\xi} + \bar{\xi}' &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{бездимензиони бр.}$$

$l_x = l \cdot \cos\alpha_{ik}$

координате: $i(x_i, y_i)$
$k(x_k, y_k)$
$c(x_c, y_c)$

Глобални коорд. систем је само 1, а локални зависи од i и k (*
*(разликује се за све штапове)



⇒ један глобални!

⇒ Кад су нам познати положаји i и k у глобалном координатном систему, можемо израчунати дужину штапа, и угао α_{ik}.

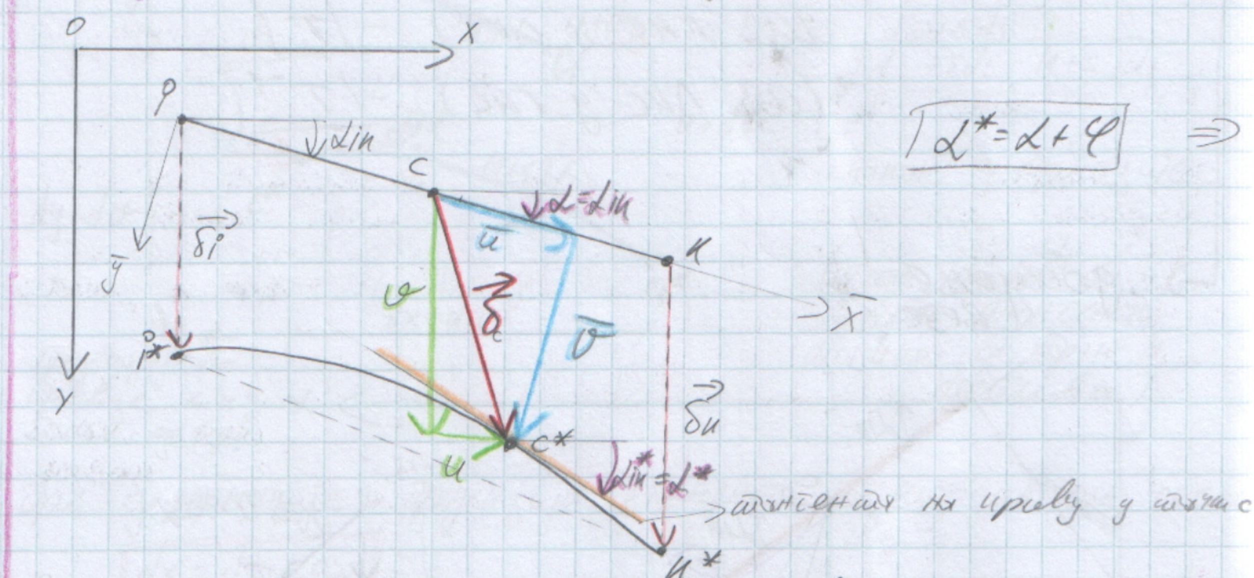
$$l_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}$$

$$\cos\alpha_{ik} = \frac{x_k - x_i}{l_{ik}} \qquad \sin\alpha_{ik} = \frac{y_k - y_i}{l_{ik}}$$

* Деформација осе штапа:

- претпостављамо да на тај штап у његовој равни делује оптерећење (нпр. ветар), тада се и i и k померају (деформишу)

Са δ_j означавамо померања одговарајућих тачака.



$\boxed{\alpha^* = \alpha + \varphi}$ ⇒

- након деф. i прелази у i*, а k у k*. i*k* - положај после деф, $\vec{\delta_i}$, $\vec{\delta_k}$ су вектори померања i и k.
- штап је пре деформације био прав и његова кривина је била 0.
- након деформације он је крив па ће сваки ел. штапа имати неку кривину.

→ $\vec{\delta}$ ⇒ разложено на 2 правца! (или у глобалном к.с или у локалном)
↳ померање неке тачке штапа након деф.

$i(x_i, y_i) \rightarrow i^*(x_i^*, y_i^*)$

(u, v, ū, v̄) - померања у глоб и лок. к.с

$k(x_k, y_k) \rightarrow k^*(x_k^*, y_k^*)$

$c(x, y) \rightarrow c^*(x^*, y^*)$

у глобалном к.с.:

$$\boxed{\begin{aligned} x^* &= x + u \\ y^* &= y + v \\ \alpha^* &= \alpha + \varphi \end{aligned}}$$

$\Delta\alpha = \varphi$ - угао за који се обрне тангента на осу штапа у посматраном пресеку.

$\alpha^* = \alpha + \varphi$

$$u = \bar{u}\cdot\cos\alpha_{in} - \bar{v}\cdot\sin\alpha_{in}$$
$$v = \bar{u}\sin\alpha_{in} + \bar{v}\cdot\cos\alpha_{in}$$

или

$$\bar{u} = u\cdot\cos\alpha_{in} + v\cdot\sin\alpha_{in}$$
$$\bar{v} = -u\cdot\sin\alpha_{in} + v\cdot\cos\alpha_{in}$$

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} \qquad \bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix}$$

$\bar{u} = T\cdot u \qquad u = T^{-1}\cdot\bar{u}$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{in} & \sin\alpha_{in} & \\ -\sin\alpha_{in} & \cos\alpha_{in} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

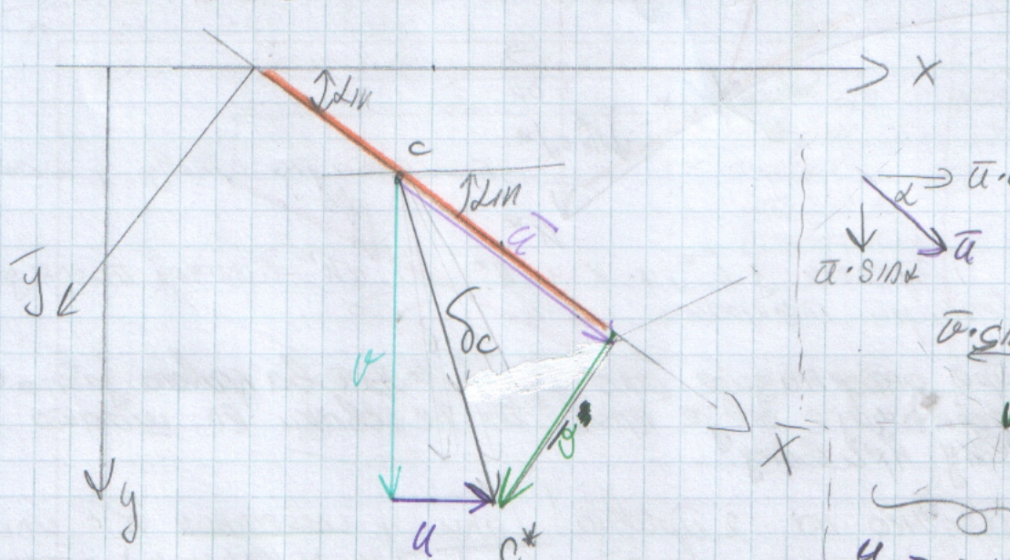
⇒ веома погодна особина. $\boxed{T^{-1} = T^T}$ → ортогонална трансформација.

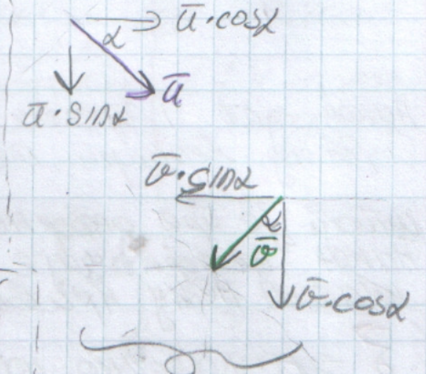
↳ матрица трансформације

(из ГКС у ЛКС) $- \boxed{T}$

(из ЛКС у ГКС) $- \boxed{T^{-1}}$

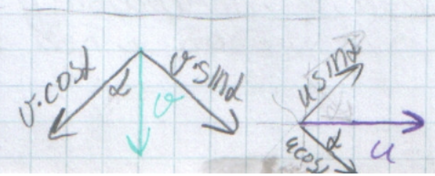
↳ добијање везе!:





u → $u = \bar{u}\cdot\cos\alpha - v\cdot\sin\alpha$

v → $v = \bar{u}\cdot\sin\alpha + \bar{v}\cos\alpha$



ū ⇒ $\bar{u} = u\cos\alpha + v\sin\alpha$

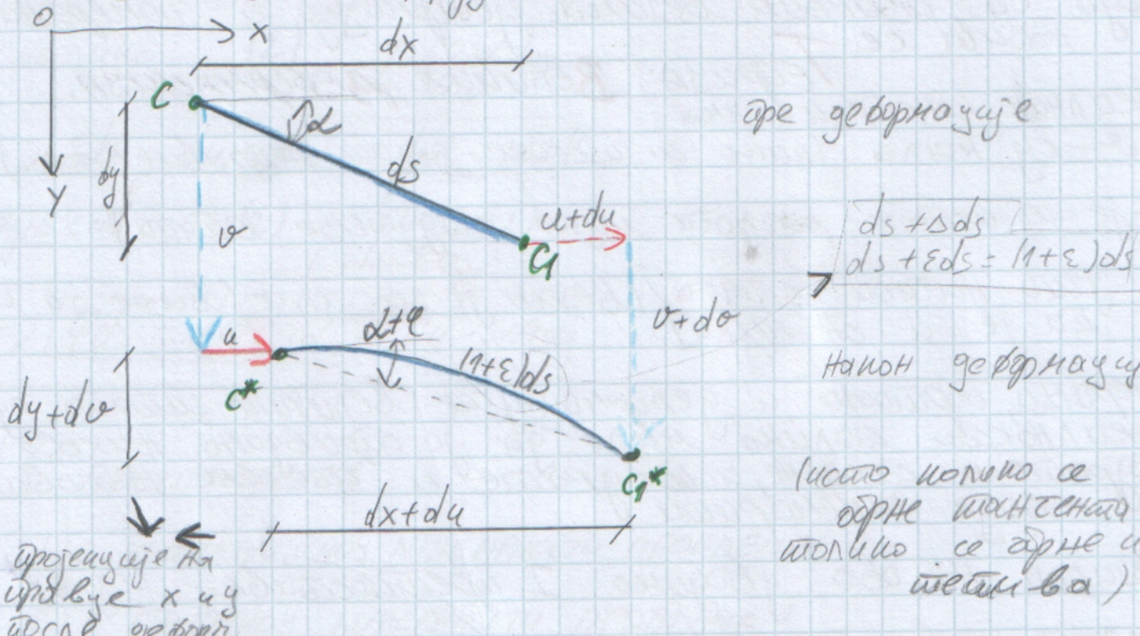
v̄ ⇒ $\bar{v} = -u\sin\alpha + v\cos\alpha$

5

(2) Извести изразе за компоненте померања ~~тачака~~ тачака осе штапа у функцији деформацијских величина елемента ~~ds~~ осе штапа у теорији великих и теорији малих деформација и малих обртања у сталном координатном систему.

* У померањима $\vec{\delta}$, поред померања која потичу од деформације, садржана су и она померања која потичу од промене положаја осе у равни штапа као целине кого и померања једних делова осе услед деформације других. Зато поред померања уводимо и друге величине које постоје само на оним местима на којима се оса деформ. а које су једнаке нули на оним местима осе на којима се она не деформише. Такве величине називамо **деформацијским величинама**

* Посматрајмо деформацију штапа у малом, тј. померање и деформацију једног диференцијалног елемента осе штапа cc_1, дужине ds.



пре деформације: пројекција елемента на координатне осе →

$$\boxed{dx = ds\cdot\cos\alpha}$$

$$\boxed{dy = ds\cdot\sin\alpha}$$

При деформацији осе, елемент прелази у положај $c^*c_1^*$ при чему се:

1) дужина њена за: $\boxed{\Delta ds = \varepsilon\, ds}$
2) а угао за $\boxed{\Delta\alpha = \varphi}$

ε – дилатација осе штапа, то је чиста деформацијска величина јер постоји само на оним местима на којима се оса деформише.

φ – угао за који се обрне тангента односно нормала на осу штапа. Није чисто деформацијска величина јер може да постоји и онда када се посматрани ел. не деформише.

$\Delta\varphi = d\Delta\alpha = \Delta d\alpha$ је чисто деф. величина јер представља промену угла између тангенти односно између нормала у бесконачно блиским тачкама осе, која је различито од нуле само на местима на којима се оса штапа деформише.

* пројекције деформисаног елемента $C^*C_1^*$ на коорд. осе:

$$(1)\quad \boxed{\begin{aligned} dx + du &= (1+\varepsilon)ds \cdot \cos(\alpha+\varphi) \\ dy + dv &= (1+\varepsilon)ds \cdot \sin(\alpha+\varphi) \end{aligned}}$$

Т. В. Д.

У овим релацијама непознате су нам $\overbrace{u, v}^{\text{зависе од отпор, геом кар.}}$, ε, φ.

У питању су нелинеарне ј-не (садрже производ 2 непознате) и представљају везу између u и v, ε и φ у којима нису уведене претпоставке о њиховим величинама па оне важе и онда када u, v, ε и φ имају коначне величине.

Теорија са оваквим везама деформација и померања назива се Теорија Великих Деформација.

* у реалним конструкцијама
  - u, v – су мала (како би избегли велике неправилности)
  - ε – је из истих разлога мало (издужење штапа)
  - φ – угао нагиба штапа [везан је за u, v (више за v)) па је и он мали]

⇒ Померања, обртања и деформацијске величине штапа су у реалности толико мале да је оправдано њихове квадрате и степене, и квадрате и степене њихових извода занемарити.

С обзиром на ово уводимо I претпоставку (од 3)*

– претпоставку о МАЛИМ ДЕФОРМАЦИЈАМА.

$$\cos\varphi \approx 1 - \underbrace{\frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots}_{\text{занем.}} \Rightarrow \cos\varphi = 1$$

$$\sin\varphi \approx \varphi - \underbrace{\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots}_{\text{занем.}} \Rightarrow \sin\varphi = \varphi$$

из адиционих формула $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha \cdot \cos\varphi - \sin\alpha \cdot \sin\varphi \\ \sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha \cdot \cos\varphi + \cos\alpha \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\varphi) &= \cos\alpha - \varphi\sin\alpha \\ \sin(\alpha+\varphi) &= \sin\alpha + \varphi\cos\alpha \end{aligned}}$$

ε – мала величина, па $\boxed{\varepsilon \cdot \varphi \approx 0}$

(мала вел · мала. вел = мала. вел^2) занемарујемо

7 из (1) следи:

$$du = \varepsilon \cdot ds \cdot \cos\alpha - \varphi \cdot ds \cdot \sin\alpha$$

$$dv = \varepsilon \cdot ds \cdot \sin\alpha + \varphi \cdot ds \cdot \cos\alpha$$

тј. $$\boxed{\begin{aligned} du &= \varepsilon \cdot dx - \varphi \cdot dy \\ dv &= \varepsilon \cdot dy + \varphi \cdot dx \end{aligned}}$$ Т.М.Д. (2)

⇒ померања u и v нису независна већ зависе од ε и φ.

- ова веза је добијена на основу Теорије о Малим Деформацијама, и показује да су ј-не линеарне, јер не постоји производ две непознате вел.

оне су линеарне захваљујући претпоставци о малим деформацијама па се још и назива

ПРЕТПОСТАВКА О ГЕОМЕТРИЈСКОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА

уколико (2) $\Big/ \cdot \cos\alpha$, $\Big/ \cdot \sin\alpha$ ⊕

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon ds = du \cdot \cos\alpha + dv \cdot \sin\alpha}$$

односно (2) $\Big/ \cdot(-\sin\alpha)$, $\Big/ \cdot \cos\alpha$ ⊕

$$\Rightarrow \boxed{\varphi ds = dv \cos\alpha - du \cdot \sin\alpha}$$

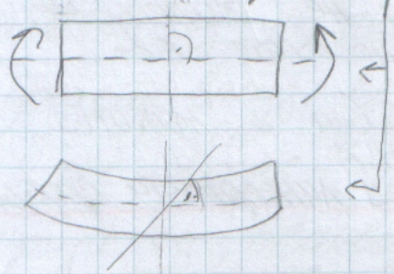
---

* 3 ПРЕТПОСТАВКЕ:

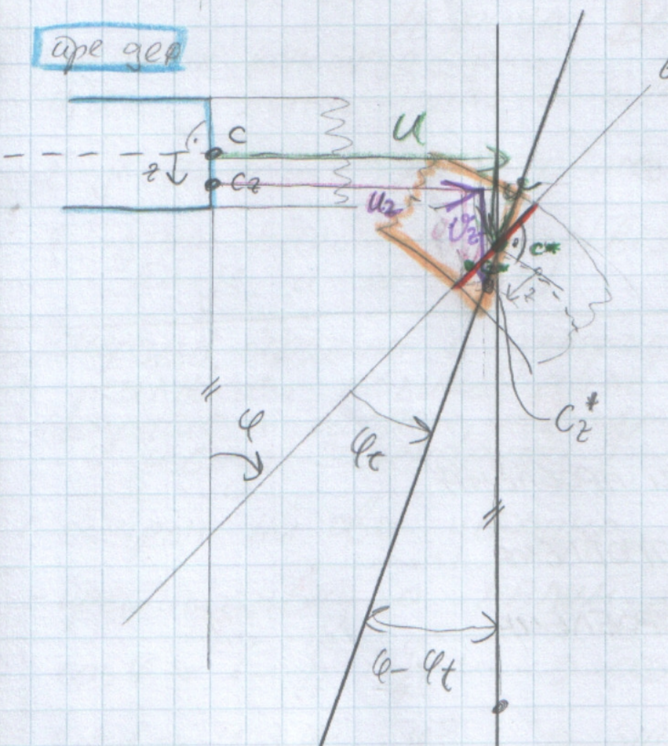
1) О ГЕОМЕТРИЈСКОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА
2) О СТАТИЧКОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА
3) О ФИЗИЧКОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА

3.) ИЗВЕСТИ ИЗРАЗЕ ЗА ДИЛАТАЦИЈУ ε_z НА ОДСТОЈАЊУ z ОД ОСЕ ШТАПА У ТЕОРИЈИ МАЛИХ ДЕФОРМАЦИЈА И МАЛИХ ОБРТАЊА.

Када смо тродимензионални проблем деформације штапа свели на једнодимензионални проблем деформације његове осе користили смо Бернулијеву претпоставку. По њој сви попречни пресеци након деформације остају равни и управни на деформисану осу. Међутим ово је тачно само за праве призматичне штапове оптерећене на чисто савијање.
Међутим, под N штап дејују и M и T долази до витоперења.



Међутим, утицај T сила на деформацију је толико мали да може потпуно да се занемари или да се приближно одреди уводећи да поп. пр. остају равни, али после деформације нису више управни на деф. осу штапа.



после деф

(промена угла)
$u_T \Rightarrow$ клизање попречног пресека (пресек није ⊥ на осу штапа већ се витопери за овај угао)

Све тачке пресека које леже на правој нормалној на раван штапа имају иста померања, па тако и C_z која је од C пре деф била на одстојању z, и после деф остаје на истом одстојању од C на деформ. оси.

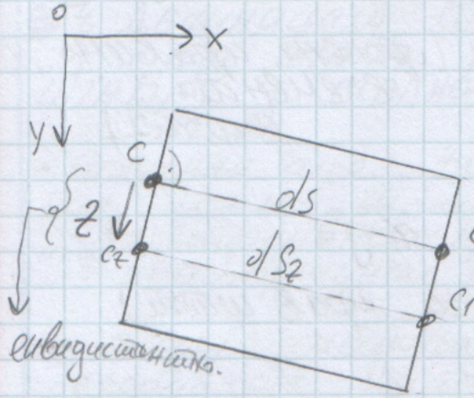
$$u_z = u - z \cdot \sin(\varphi - \varphi_T)$$

$$z + v_z = v + z \cdot \cos(\varphi - \varphi_T)$$

$\sin(\varphi - \varphi_T) \approx (\varphi - \varphi_T)$
$\cos(\varphi - \varphi_T) \approx 1$
} ово смо већ усвојили

$\Rightarrow u_z = u - z(\varphi - \varphi_T)$
$v_z = v$
} померање било које тачке пресека дато је преко померања тачке на оси штапа

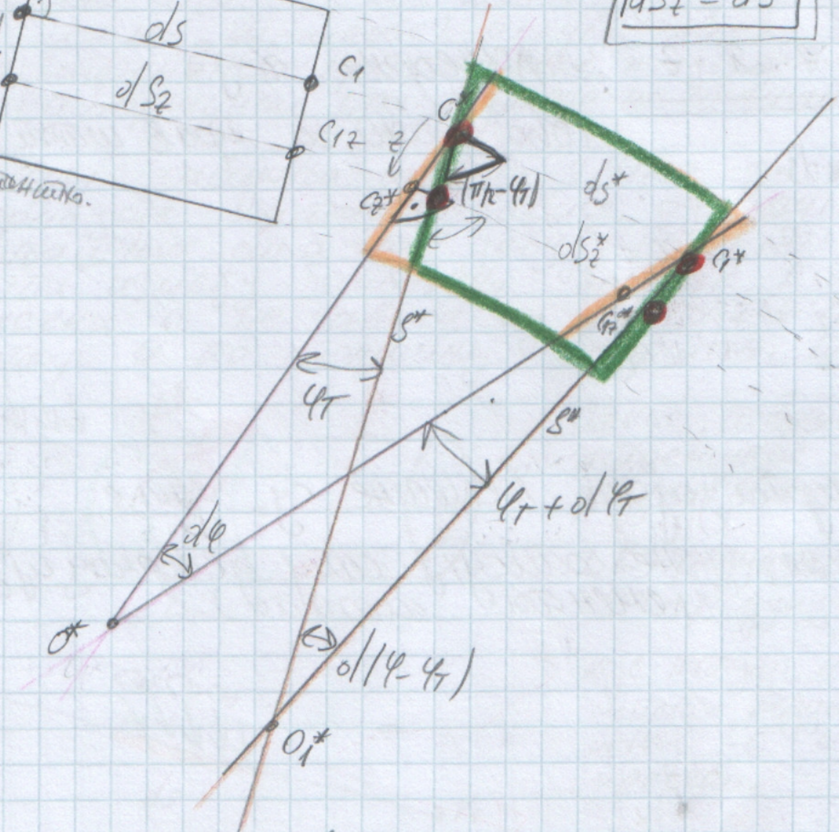
φ и φ_T су мале вел.



пре деф.

$\boxed{ds_z = ds}$

— деформ.



после деф

s^* - полупречник кривине

$s^* = \overline{O_1^* \cdot C_1^*}$

$ds = ds_z$

$ds^* = (1+\varepsilon)ds$

Зелена

Зелена

посматрамо 2Δ

$\left.\begin{array}{l} \Delta\, C^* O_1^* C_1^* \\ \Delta\, C_z^* O_1^* C_{1z}^* \end{array}\right\}$ из синусне теореме $\left(\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}\right)$

$$\Rightarrow \frac{ds^*}{\sin d(\varphi - \varphi_T)} = \frac{s^*}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi_T)}$$

$$\text{и} \quad \frac{ds_z^*}{\sin d(\varphi - \varphi_T)} = \frac{s^* - z}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi_T)}$$

$$ds^* \cos\varphi_T = s^* \cdot \sin d(\varphi - \varphi_T)$$

$$ds_z^* \cdot \cos\varphi_T = (s^* - z)\sin d(\varphi - \varphi_T)$$

$$ds_z^* \cdot \cos\varphi_T = ds^* \cdot \cos\varphi_T - z \cdot \sin d(\varphi - \varphi_T)$$

$$(1 + \varepsilon_z)ds = (1+\varepsilon)\, ds - z \cdot d(\varphi - \varphi_T)$$

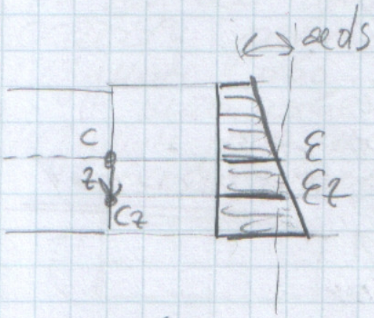
$$1 + \varepsilon_z = \varepsilon - z\frac{d(\varphi - \varphi_T)}{ds}$$

$$\boxed{\varkappa = -\frac{d(\varphi-\varphi_T)}{ds}}$$

уводимо $\varkappa$ (промена кривине елемента штапа)

$\Rightarrow$ $\underline{\varepsilon_z = \varepsilon + \varkappa \cdot z}$ линеарна ф-ја

(ово важи за прав штап)



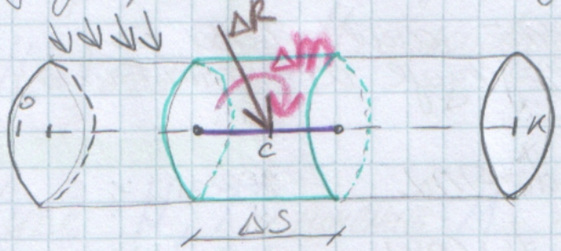
основне деформацијске величине су дакле ε, φ_T и $\varkappa$. (оне описују саму деформацију елемента штапа)

-11-

3.4. ДЕФИНИЦИЈА СПОЉАШЊИХ И УНУТРАШЊИХ СИЛА КОД ШТАПА. УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ ЕЛЕМЕНТА ШТАПА У СТАЛНОМ И ЛОКАЛНОМ КООРД. СИСТЕМУ.

- Спољашње силе на сва тела у природи (а самим тим и на штапове) делују као:
 1) запреминске (расподељене по делу запремине штапа)
или
 2) површинске (расподељене по спољашњој површини штапа)

Из теорије савијања штапа знамо да напони и деформације штапа зависе од резултанти спољашњих сила које делују на елементе штапа између бесконачно блиских попречних пресека а не зависе од расподеле тих сила унутар и по спољашњој површини тих елемената.



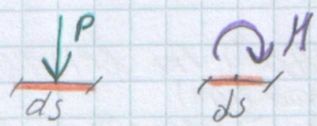
Дакле, површинске и запреминске силе се редукују на осу штапа

ΔR – редукована резултанта
Δm – редуковани моменат свих спољ. сила, које нападају тај део штапа, редукованих на тачку C између датих пресека.

a)

РАСПОДЕЉЕН ОПТ. И МОМ.

б)



КОНЦЕНТРИСАНО ОПТ. И МОМ.

a) ⇒ РАСПОДЕЉЕНА СИЛА $\vec{p} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta s} = \frac{dR}{ds}$

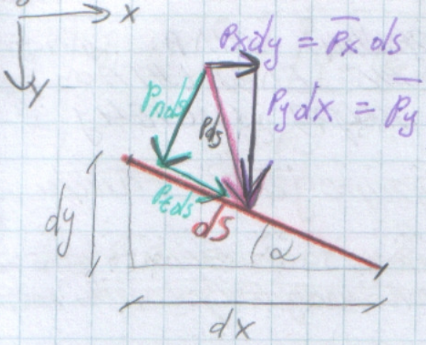
РАСПОДЕЉЕНИ МОМЕНАТ $\vec{m} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \frac{dm}{ds}$

} у тачки C.

- $\vec{p}$ и $\vec{m}$ су векторске величине које могу да имају произвољан правац у простору. Да би деформација штапа била равна, силе $\vec{p}$ и вектори мом. $\vec{m}$ морају да леже у равни штапа.

б) – Оптерећења $\vec{p}$ и $\vec{m}$ великог интензитета на кратком делу осе штапа замењујемо њиховим резултантама $\vec{P}$ и $\vec{M}$, и уводимо појмове
концентрисаног оптерећења силом $\vec{P}$ и
концентрисаног оптерећења моментом $\vec{M}$.

⇒ моменти $\vec{m}$ су често мали или једнаки нули, па их можемо занемарити. Зато, ако другачије није наглашено претпостављамо да је штап оптерећен само расподељеним или концентрисаним силама.



$p\,ds$ – резултантни оптер. на ds

⇒ силу $\vec{p}$ можемо да разложимо на:

1) компоненте у правцу тангенте и нормале на осу штапа (природне компоненте оптерећења)

2) компоненте у правцу x и y осе једног сталног коорд. сист. Oxy.

$\bar{p}_x ds, \bar{p}_y ds$ – компоненте специфичног оптерећења по јединици дужине осе штапа

$p_x dy, p_y dx$ – компоненте специфичног оптерећења по јединици дужине пројекције осе штапа на x и y осу.

ВЕЗЕ:

$$\bar{p}_x ds = p_x dy = p_t \cdot ds \cdot \cos\alpha - p_n \cdot ds \cdot \sin\alpha$$

$$\bar{p}_y ds = p_y dx = p_t \cdot ds \cdot \sin\alpha + p_n \cdot ds \cdot \cos\alpha$$

⟺ или

$$\bar{p}_x = p_x \cdot \sin\alpha = p_t \cdot \cos\alpha - p_n \cdot \sin\alpha$$

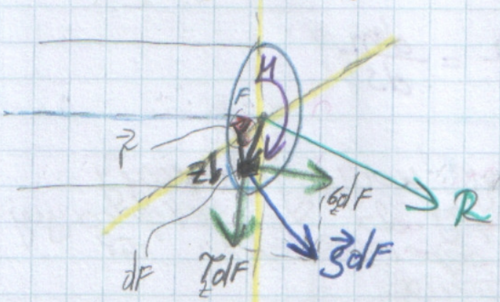
$$\bar{p}_y = p_y \cdot \cos\alpha = p_t \cdot \sin\alpha + p_n \cdot \cos\alpha$$

Спољашње силе се деле на:

1) конзервативне – при деформацији не мењају ни величину ни правац. (гравитација)

2) неконзервативне – не мењају величину али мењају правац током деф. (хидростат. притисак)

– као последица деловања спољашњих сила, у штапу се јављају напони.



– унутрашње силе схватамо као површинске силе које се преносе преко замишљених пресека у телу а изражавамо их преко напона.

$\vec{\rho}$ – тотални напон на елементу површине dF попречног пресека F.

$\vec{\rho}\,dF$ – унутрашња елементарна ун. сила која се преноси преко елемента површине dF.

– редукцијом $\vec{\rho}\,dF$ на тежиште поп. пр. добијамо силу $\vec{R}$ и момент $\vec{M}$.

$$\vec{R} = \int_F \vec{S}\, dF$$

$$\vec{M} = \int_F \vec{r} \cdot \vec{S}\, dF$$

У случају равног штапа оптерећеног силама у равни штапа сила $\vec{R}$ и срег вектора момента $\vec{M}$ леже такође у равни штапа.

Силу $\vec{R}$ разлажемо на компоненту N нормалну на поп. пр. коју називамо **НОРМАЛНОМ СИЛОМ**, и компоненту T у равни поп. пр. коју називамо **ТРАНСВЕРЗАЛНОМ СИЛОМ**.

$$\boxed{N = \int_F \sigma\, dF \qquad T = \int_F \tau\, dF \qquad M = \int_F \sigma \cdot z\, dF}$$

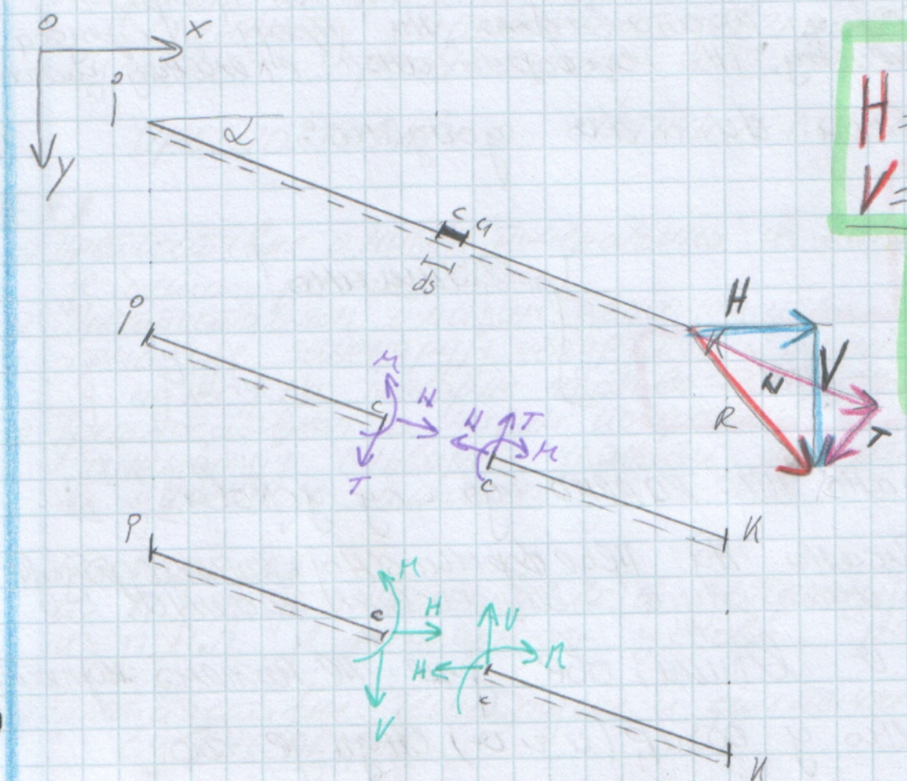
У случају равне деф. штапа вектор $\vec{M}$ је нормалан на раван штапа, тј постоје скалар који обележавамо са M и називамо **МОМЕНАТ САВИЈАЊА**.

- Силе N, T и моменат M називамо **СИЛЕ У ПРЕСЕКУ** или **ПРЕСЕЧНЕ СИЛЕ**.

* конвенција: N је позитивна код затеже штап

T је позитивна код део на који делује обрће у смеру казаљке на сату.

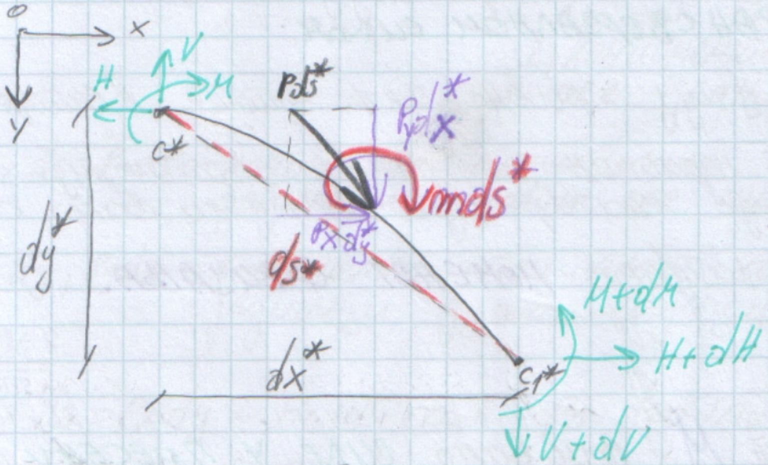
M је позитиван код затеже доњу стр. штапа (доњу страну ми бирамо и обележавамо је испрекиданом линијом)



$$\boxed{\begin{aligned} H &= N\cos\alpha - T\sin\alpha \\ V &= N\sin\alpha + T\cos\alpha \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} N &= H\cos\alpha + V\sin\alpha \\ T &= V\cos\alpha - H\sin\alpha \end{aligned}}$$

- У штапу постоје само напони, а пресечне силе су фикција
- Између спољашњих сила и унутрашњих сила у сваком тренутку мора да постоји равнотежа.
- Посматрајмо штап на који наносимо оптерећење. услед тог оптерећења штап ће се померити у равни (изазваће напоне и унутрашње силе)



$$\boxed{ds^* = (1+\varepsilon)ds}$$

$$p_x dy^* \cdot \frac{dy^*}{2} = \frac{dy^{*2}}{2} \rightarrow \text{занем}$$

итд.

$$\boxed{dx^* = dx + du}$$

$$\boxed{dy^* = dy + dv}$$

$$dH + p_x(dy + \cancel{dv}) = 0 \qquad (dH + p_x dy^* = 0)$$

$$dV + p_y(dx + \cancel{du}) = 0 \qquad (dV + p_y \cdot dx^* = 0)$$

$$dM + H(dy + \cancel{dv}) - V(dx + \cancel{du}) - m \cdot \underbrace{ds^*}_{(1+\varepsilon)ds} = 0 \qquad (\text{из } \sum M^{c_1} = 0)$$

⇒ Непознате су H, V, M али и ε.

- ако занемаримо u и v испада $dx^* = dx$, односно услови рав. нису постављени на крају процеса већ на почетку. (на недеформисаном елементу штапа)

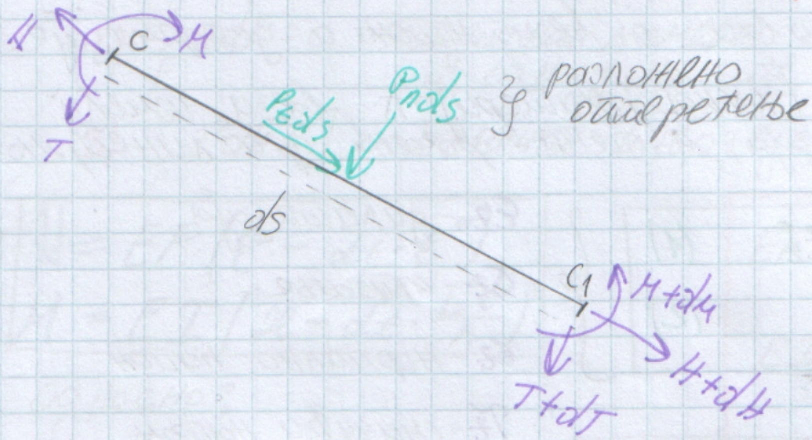
⇒ дакле, занемаривши du и dv добијамо:

$$\left.\boxed{\begin{aligned} dH + p_x\, dy &= 0 \\ dV + p_y\, dx &= 0 \\ dM + H dy - V dx - m ds &= 0 \end{aligned}}\right\} \text{олакшано!}$$

↳ ово је оправдано што је важно да су услови равнотеже написани на недеформисаној конфигурацији (то радимо иако није баш сасвим тачно)

⇒ ако су u и v велики, ове јне не можемо користити. (ако их узмемо у обзир (u и v) онда је то ТЕОРИЈА II РЕДА)

На овај начин долазимо до II основне претпоставке о **СТАТИЧКОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА**.



(из $\sum M^{c_1}=0$)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dN}{ds}+p_t&=0 \\ \frac{dT}{ds}+p_n&=0 \\ \frac{dM}{ds}-T&=0 \end{aligned}}$$

(3 услова равнотеже ел. штапа кад смо разложили силе на правац штапа и управно на њега)

- претпоставка коју смо овде увели (да услове равнотеже исписујемо на недеформисаном елементу штапа) је довело до линеарног услова равнотеже па се зове

ПРЕТПОСТАВКА О СТАТИЧКОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА.

***

⇒ Претпоставке о малим померањима и малим деформацијама је битно разликовати.

⇒ Претпоставком о малим деформацијама се у геометрији деформације занемарују квадрати и виши степени померања у односу на линеарне чланове померања

⇒ Претпоставком о малим померањима се у геометрији сила, занемарују линеарни чланови померања у односу на димензије штапа.

⇒ ПОСЛЕДИЦЕ:
из **П.М.Д.** је линеарност веза деформацијских величина и померања
из П.М.П. је линеарност услова равнотеже

⇒ Претпоставке геометријске и статичке линеарности су НЕЗАВИСНЕ.

→ ТЕОРИЈА у којој уводимо обе п.л. је ТЕОРИЈА I РЕДА.

→ ТЕОРИЈА у којој уводимо прву, а не другу п.л. је ТЕОРИЈА II РЕДА

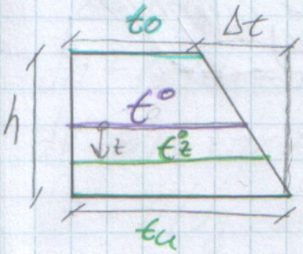
5) ИЗВЕСТИ ВЕЗЕ НОРМАЛНЕ СИЛЕ N И МОМЕНТА САВИЈАЊА M СА ДЕФОРМАЦИЈСКИМ ВЕЛИЧИНАМА И ТЕМПЕРАТУРНИМ ПРОМЕНАМА.

- Уводимо претпоставке о вези напона и деформације.
- За најидеалнији (Хуков) материјал, веза између напона, дилатације и темп. промена при линеарном стању напона:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} + \alpha_t \cdot t_z^o \quad (1) \\ \gamma_z &= \frac{\tau_z}{G} \quad (2) \end{aligned}}$$

ε_z - дилатација
γ_z - клизање
σ_z - нормални напон
τ_z - смичући напон
t_z - температурна промена на одстојању z од осе штапа.
E - модул еластичности
G - модул клизања
α_t - коефицијент линеарне температурне дилатације материјала.

- претпоставимо да се температурне промене линеарно мењају по висини штапа (h).



где су: t_o - температурна промена горњег влакна
t_u - температурна промена доњег влакна
$\Delta t = t_u - t_o$ - температурна разлика
t^o - температурна промена у оси штапа

⇒ температурна промена - t_z^o на одстојању z од осе штапа је:

$$\boxed{t_z^o = t^o + z \cdot \frac{\Delta t}{h}}$$

од раније → $\boxed{\varepsilon_z = \varepsilon + z \cdot \kappa}$

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z - \alpha_t \cdot t_z \cdot E = E[\varepsilon - \alpha_t \cdot t^o] + z \cdot E[\kappa - \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h}]$$

$$N = \int_F \sigma_z \, dF = \underbrace{E}_{\text{независне од } F}[\varepsilon - \underbrace{\alpha_t \cdot t^o}_{const}] \cdot \int_F dF + E[\kappa - \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h}] \int_F z \cdot dF$$

↳ једнак везан за теж. ср.

$$M = \int_F \sigma_z \cdot z \, dF = E[\varepsilon - \alpha_t \cdot t^o] \int_F z \cdot dF + E[\kappa - \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h}] \int_F z^2 dF$$

знамо:

1) $\int_F dF = F$ - површина

2) $\int_F z\,dF = 0$ -статички момент елемента површине у односу на тежиште $= 0$.

3) $\int_F z^2 dF = I$ -момент инерције

$$\boxed{\begin{aligned} N &= EF(\varepsilon - \alpha_t \cdot t^\circ) \\ M &= EI\left(\varkappa - \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h}\right) \end{aligned}}$$

EF - аксијална крутост штапа

EI - крутост штапа на савијање

GF - крутост штапа на смицање

односно:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t \cdot t^\circ \\ \varkappa &= \frac{M}{EI} + \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \end{aligned}}$$

⇒ овим једначинама представљене су везе између деформацијских величина ε и $\varkappa$, температурних промена t° и Δt и сила у пресеку N и M.

Ове ј-не су линеарне захваљујући Хуковом закону из кога су изведене.

- зато претпоставку исказану овим законом и називамо

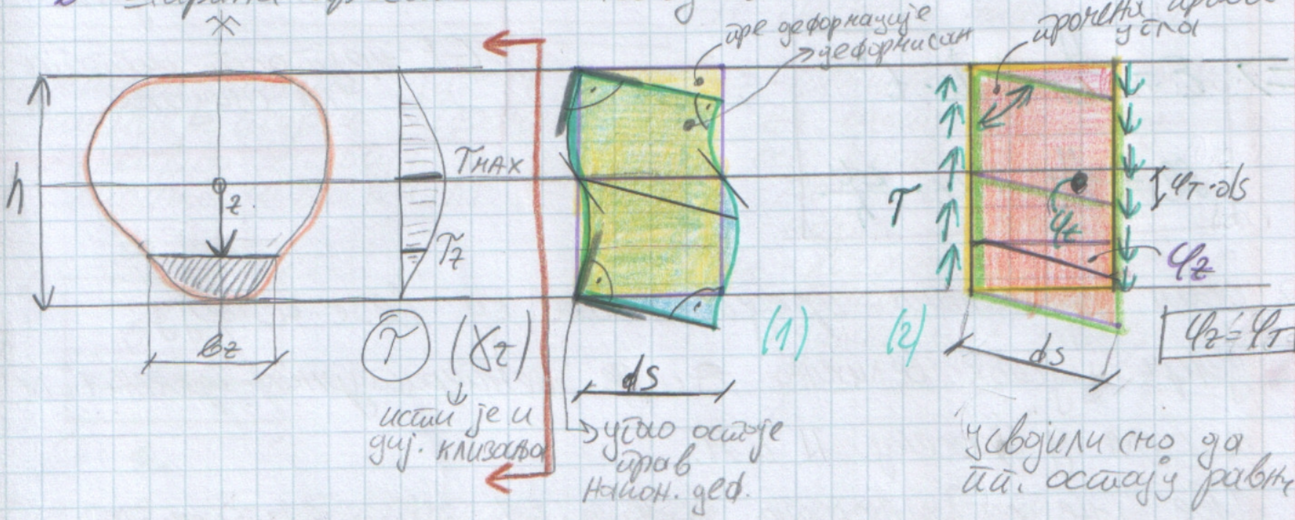
ПРЕТПОСТАВКОМ О ФИЗИЧКОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА.

6) Извести везу између трансверзалне силе T и клизања φ_T.

По хипотези Журавског:

$$\boxed{\tau_z = \frac{T S_z}{I b_z}} \quad \underset{(\gamma = \frac{\tau}{G})}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\gamma_z = \frac{T \cdot S_z}{G I \cdot b_z}}$$

T - трансверзална сила
S - статички момент дела површине попречног пресека изнад или испод праве $z = const.$ у односу на тежиште пресека
I - моменат инерције попречног пресека
b - ширина пресека на месту $z = const$



СТВАРНЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ (витоперење)

ПРЕТПОСТАВЉЕНЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ

Клизање се мења као и напон смицања по висини попречних пресека од нуле у крајњим влакнима, до максималне вредности у тежишту или у близини тежишта пресека.

Због овакве расподеле клизања пресеци се витопере. (1)

Ако стварну расподелу клизања заменимо таквом расподелом γ_z' при којој је производ $\gamma_z' \cdot ds$ $const.$, тада елемент правог штапа уместо деформације (1) трпи деформацију (2). Попречни пресеци у том случају остају равни, али релативно смакнути за величину $\gamma_z' \cdot ds = \varphi_T ds$, где је φ_T промена угла између попречног пресека и осе штапа.

- Угао φ_T се одређује на више начина.

- Одређујемо га из услова да рад напона смицања τ_z на посматраном елементу штапа при стварној расподели клизања буде једнак раду тих напона при претпостављеној расподели клизања.

РАД НАПОНА СМИЦАЊА ПРИ СТВАРНОЈ ДЕФОРМАЦИЈИ ЕЛЕМЕНАТА ДУЖИНЕ ds je:

$$dA = \int_F \tau_z \gamma_z ds \cdot dF = ds \int_F \frac{\tau_z^2}{G} dF = ds \frac{T^2}{GF} \underbrace{\frac{F}{I^2} \int_F \frac{S^2}{b^2} dF}_{K} = K \cdot \frac{T^2}{GF} ds$$

$$\boxed{K = \frac{F}{I^2} \cdot \int_F \frac{S^2}{b^2} dF}$$

коефицијент који зависи од облика попречног пресека.

РАД НАПОНА СМИЦАЊА ПРИ ПРЕТПОСТАВЉЕНОЈ РАСПОДЕЛИ КЛИЗАЊА je:

$$d\bar{A} = \int_F \tau_z \varphi_{Tz} \cdot ds \cdot dF = \varphi_T \cdot ds \cdot \int_F \tau_z \cdot dF = \varphi_T \cdot T \cdot ds$$

претпостављамо:

$$dA = d\bar{A}$$

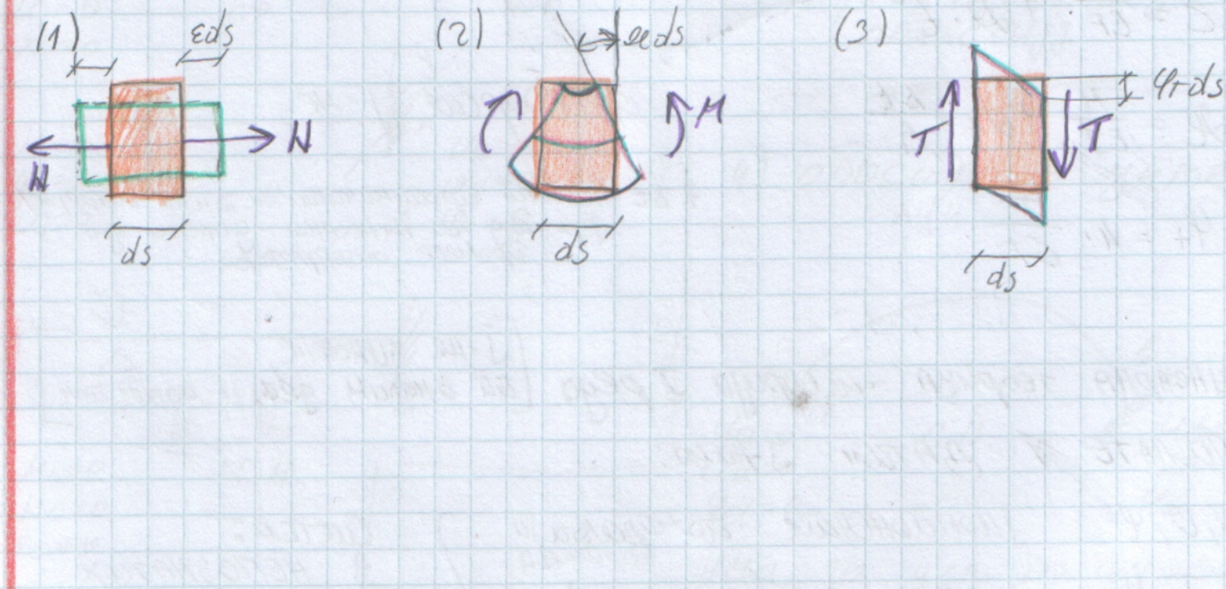
$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi_T = K \cdot \frac{T}{GF}}$$

***

(1) $\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t \cdot t^\circ$

(2) $\varkappa = \frac{M}{EI} + \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h}$

(3) $\varphi_T = K \cdot \frac{T}{GF}$



7. РЕКАПИТУЛАЦИЈА Ј-НА И ГРАНИЧНИ УСЛОВИ ТЕОРИЈЕ САВИЈАЊА ШТАПА У РАВНИ.

(1) ПРЕТПОСТАВКА О МАЛИМ ДЕФОРМАЦИЈАМА
(О ГЕОМЕТРИЈСКОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА)

$$du = \varepsilon dx - \varphi dy$$
$$dv = \varepsilon dy + \varphi dx$$
$$d(\varphi - \varphi_T) = -\varkappa ds$$

диференцијалне ј-не.

(2) ПРЕТПОСТАВКА О СТАТИЧКОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА
(добијене на почетној недеформисаној конфигурацији)

$$\frac{dH}{ds} + p_t = 0$$
$$\frac{dT}{ds} + p_n = 0$$
$$\frac{dM}{ds} - T = 0$$

диференцијалне ј-не

(3) ПРЕТПОСТАВКА О МАТЕРИЈАЛНОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА
(физичкој)

$$\varepsilon = \frac{H}{EF} + \alpha_t \cdot t^\circ$$
$$\varkappa = \frac{M}{EI} + \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h}$$
$$\varphi_T = k \cdot \frac{T}{GF}$$

алгебарске ј-не.

* Δt можемо протумачити и као оптерећење јер кад га нанесемо долази до промене оптерећења

* ЛИНЕАРНА ТЕОРИЈА – теорија I реда [ј-не линеарне, тј. о малим деф. и малим пом]

НЕПОЗНАТЕ У ДАТИМ Ј-НАМА:

u, v, φ (компоненте померања и обртања)
H, T, M (силе у пресецима) (статичке величине)
$\boxed{\varepsilon, \varkappa, \varphi_t}$ (деформацијске вел)

СИСТЕМ: 9 НЕПОЗНАТИХ
9 Ј-НА

заменимо у (1)